УДК 519.213

РОЗПОДІЛИ ФІБОНАЧЧІ

Ю.І. Волков

Изучается семейство арифметических распределений, которые являются обобщениями биномиального распределеня. Получены асимптотические формулы для математического ожидания и дисперсии. Кроме того, найдены наиболее вероятные значения соответствующей случайной величины.

The family of arithmetical distributions, which the binomial distribution are a generalization, is studied. For the expectation and variance the asymptotic formulas are determine. Thereto, the most probable number of corresponding random variable are found.

Проводиться n незалежних випробувань Бернуллі з імовірністю успіху p. Ймовірність p_k того, що при такому експерименті отримаємо рівно k успіхів за умови, що за кожним успіхом слідує принаймні m ($m \geq 0$) невдач можна знайти за формулою:

$$p_k = \frac{C_{n-mk}^{k}(p/q)^k}{\sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^{i}(p/q)^i}, \quad k=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ [n/(m+1)],\ p+q=1. \qquad (1)$$

Якщо $m=0$, то це звичайний біноміальний розподіл з параметрами (***n***, ***p***).

Розподіли, які визначаються за допомогою співвідношення (1), частинні випадки арифметичних **(*a*, *b*, *m*, *n*)**-розподілів.

Означення. *Випадкова величина ξ має розподіл Фібоначчі з параметрами* **(*a*, *b*, *m*, *n*)**, *якщо вона приймає значення $k=0, 1, 2, \ldots, [n/(m+1)]$ з ймовірностями*

$$p_k = \frac{C_{n-mk}^{k} b^k a^{n-(m+1)k}}{\sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^{i} b^i a^{n-(m+1)i}}, \qquad (2)$$

a, b довільні додатні числа, m, n – натуральні.

Якщо в (2) покласти $a=1$, $b=p/q$, то отримаємо (1), а у випадку $m=1$, $a=b=1$, отримаємо розподіл, який вивчав П.Філіппоні, [1].

Метою даної роботи є дослідження розподілів Фібоначчі, як то: дослідити поведінку $M\xi$ при $n \to \infty$, дослідити поведінку $D\xi$ при $n \to \infty$, знати найбільш ймовірне значння випадкової величини ξ.

Лема 1. *Числа*

$$u_n(a,b) := \sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^{i} b^i a^{n-(m+1)i} \qquad (3)$$

задовольняють рекурентне співвідношення

$$u_{n+m+1} = au_{n+m} + bu_n,\ u_0=1,\ u_1=a,\ \ldots,\ u_m=a^m. \qquad (4)$$

Співвідношення (4) випливає з такої тотожності:

$$C_{n+m-mi}^{i} + C_{n+m-mi}^{i-1} = C_{n+m-mi+1}^{i}.$$

Далі використовуватимемо характеристичне рівняння для рекурентного співвідношення (4):

$$z^{m+1}=az^{m} + b \qquad (5)$$

Лема 2. *Рівняння (5) має єдиний додатний корень $a< \lambda<a+2$. Всі інші корені цього рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ по модулю строго менші, ніж λ.*

Доведення. На проміжку $[a,\infty]$ функція $f(z):=z^{m+1}-az^{m} - b$ строго монотонно зростає ($f'(z)= (m+1)z^{m}-maz^{m-1}= z^{m-1}((m+1)z-ma)>0$), в точці a $f(a)=-b<0$, а для досить великих z $f(z)>0$, тому існує єдине λ, де $f(\lambda)=0$.

Далі перепишемо рівняння (5) так:

$w^{m+1} - \dfrac{a}{\lambda} w^{m} = \dfrac{b}{\lambda^{m+1}}$, де $w=z/\lambda$. Звідси $|w|^{m}\left|w-\dfrac{a}{\lambda}\right| = \dfrac{b}{\lambda^{m+1}}$. Припустимо, що існує корінь $w_0\neq 1$ і $|w_0| \geq 1$. Тоді $|w_0|^{m}\left|w_0-\dfrac{a}{\lambda}\right| = \dfrac{b}{\lambda^{m+1}} \geq \left|w_0-\dfrac{a}{\lambda}\right| > 1-\dfrac{a}{\lambda}$, але $\dfrac{b}{\lambda^{m+1}} = 1-\dfrac{a}{\lambda}$, бо λ корінь рівняння (5), прийшли до протиріччя. Отже, $|w_0|<1 \Leftrightarrow |z_0|<\lambda$, z_0 любий корінь рівняння (5), який не дорівнює λ.

Лема 3. Має місце рівність:

$$u_n(a,b)=C\lambda^{n} + C_1\lambda_1^{n}+ \ldots+C_m\lambda_m^{n}, \qquad (6)$$

де сталі C, C_1 ,…, C_m знаходяться з початкових умов рекурентного співвідношення (4).

Рівність (6) випливає з того, що рекурентне співвідношення (4) – лінійне однорідне з постійними коефіцієнтами.

Неважко показати, що, наприклад, $\ln C = \sum_{k=1}^{m} \ln\dfrac{a-\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}$.

Для знаходження математичного сподівання і дисперсії досліджуваного розподілу скористаємось генератрисою розподілу. Позначимо її через $P(z)$,

$$P(z)=\frac{u_n(a,bz)}{u_n(a,b)},\ M\xi=P'(1),\ D\xi=P''(1)+P'(1) -(P'(1))^2. \qquad (7)$$

Для знаходження відповідних похідних спочатку знайдемо похідні по z від функцій $u_n(a,bz)$. Ці функції задовольняють рекурентне співвідношення

$$u_{n+m+1}(a,bz)=au_{n+m}(a,bz) + bu_n(a,bz),\ u_0=1,\ u_1=a,\ \ldots,\ u_m=a^{m}. \qquad (8)$$

Характеристичне рівняння для цього рекурентного співвідношення

$$w^{m+1}=aw^{m}+ bz. \qquad (9)$$

Нехай $\lambda(z)$, $\lambda_1(z)$, …, $\lambda_m(z)$ розв’язки рівняння (9) . Тоді

$$\lambda(1)=\lambda,\ \lambda_1(1)=\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m(1)=\lambda_m \qquad (10)$$

$$u_n(a,bz)=C(z)(\lambda(z))^{n}+C_1(z)(\lambda_1(z))^{n}+\ldots+C_m(z)(\lambda_m(z))^{n}, \qquad (11)$$

функції $C(z)$, $C_1(z)$,…, $C_m(z)$ можна знайти з початкових умов (8), а $C(1)=C$, $C_1(1)=C_1$,…, $C_m(1)=C_m$. Наприклад, $\ln C(z)=\sum_{k=1}^{m}\ln\frac{a-\lambda_k(z)}{\lambda(z)-\lambda_k(z)}$.

Будемо користуватись позначеннями: $C'=C'(1)$, $C_1'=C_1'(1)$, …, $C_m'=C_m'(1)$ і аналогічними позначеннями для других похідних.

Теорема 1. *Мають місце асимптотичні рівності:*

$$M\xi=\frac{b}{mb+\lambda^{m+1}}n+C_M+o(1),n\to\infty, \quad (12)$$

$$D\xi=\frac{ab\lambda^{2m+1}}{(mb+\lambda^{m+1})^3}n+C_M+C_D+o(1),n\to\infty, \quad (13)$$

де сталі C_M і C_D можна виразити через корені рівняння (5) (див. далі).

Доведення. Спочатку знайдемо похідні по z від розв'язків рівняння (9), користуючись цим рівнянням, отримаємо

$$\lambda'(z)=\frac{b\lambda(z)}{(\lambda(z))^{m+1}+mbz},\ \left(\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}\right)'=-\frac{b(mb+(m+1)(\lambda(z))^m\lambda'(z))}{((\lambda(z))^{m+1}+mbz)^2}.$$

Звідси

$$\lambda':=\lambda'(1)=\frac{b\lambda}{\lambda^{m+1}+mb}, \quad (14)$$

$$\left.\left(\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}\right)'\right|_{z=1}=\frac{\lambda''(1)}{\lambda}-\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2=-\frac{b^2((2m+1)\lambda^{m+1}+m^2b)}{(\lambda^{m+1}+mb)^3}. \quad (15)$$

$$\lambda'':=\lambda''(z)\big|_{z=1}=\frac{b^2\lambda m(b(1-m)-2\lambda^{m+1})}{(\lambda^{m+1}+mb)^3} \quad (16)$$

Аналогічні формули мають місце і для функцій $\lambda_k(z)$, $k=1,2,\ldots,m$.

Користуючись (11), знаходимо

$$P'(1)=\frac{C'\lambda^n+C\lambda^{n-1}\lambda'n+C_1'\lambda_1^n+C_1\lambda_1^{n-1}\lambda_1'\ldots+C_m'\lambda_m^n+C\lambda_m{}^{n-1}\lambda_m'n}{C\lambda^n+C_1\lambda_1^n+\ldots+C_m\lambda_m^n}=$$

$$\frac{C'}{C}+\frac{\lambda'}{\lambda}n+o(1), \quad (17)$$

при $n\to\infty$, бо $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^n\to 0,n\to\infty$, $k=1, 2,\ldots, m$ за лемою 2.

Якщо скористатись (14), то матимемо

$$M\xi=\frac{C'}{C}+\frac{b}{\lambda^{m+1}+mb}n+o(1),\ n\to\infty, \quad (18)$$

що доводить співвідношення (12) теореми.

З виразу для $\ln C(z)$ випливає

$$C_M:=\frac{C'}{C}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k'}{\lambda_k-a}-\frac{\lambda_k'-\lambda'}{\lambda_k-\lambda}, \quad (19)$$

а за формулами (14) цю сталу можна виразити через корені характеристичного рівняння (5).

Подібно до попереднього, знайдемо

$$P''(1)=\frac{C''}{C}+\frac{2C'}{C}\cdot\frac{\lambda'}{\lambda}n+\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 n(n-1)+n\frac{\lambda''}{\lambda}+o(1),n\to\infty .$$

Якщо скористатись (7), (14), (15) і (17), то

$$D\xi=\frac{C'}{C}+\left(\frac{C'}{C}\right)'+\left(\frac{\lambda'}{\lambda}+\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)'\right)n+o(1)=\frac{C'}{C}+\left(\frac{C'}{C}\right)'+\frac{ab\lambda^{2m+1}}{\left(\lambda^{m+1}+mb\right)^3}n+o(1),n\to\infty, \quad (20)$$

що доводить співвідношення (13) теореми.

З виразу для $\ln C(z)$ випливає

$$C_D:=\left(\frac{C'}{C}\right)'=\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k''}{\lambda_k-a}-\left(\frac{\lambda_k'}{\lambda_k-a}\right)^2-\frac{\lambda_k''-\lambda''}{\lambda_k-\lambda}+\left(\frac{\lambda_k'-\lambda'}{\lambda_k-\lambda}\right)^2, \quad (21)$$

а за формулами (14) і (16) цю сталу можна виразити через корені характеристичного рівняння (5).

Наслідок 1. *Мають місце співвідношення:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M\xi}{n}=\frac{b}{mb+\lambda^{m+1}}, \quad (22)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D\xi}{n}=\frac{ab\lambda^{2m+1}}{(mb+\lambda^{m+1})^3}. \quad (23)$$

Якщо в співвідношенні (22) взяти m=1, a=b=1, то отримаємо результат Філіппоні [1, Theorem 4, P.338].

Наслідок 2. *Нехай розподіл випадкової величини задається співвідношеннями (1). Тоді*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M\xi}{n}=\frac{p}{mp+q\lambda^{m+1}},\ \lim_{n\to\infty}\frac{D\xi}{n}=\frac{pq^2\lambda^{2m+1}}{(mp+q\lambda^{m+1})^3},$$

де λ додатний корінь рівняння $q\lambda^{m+1}=q\lambda^m+p$.

Наслідок 3. *Нехай $m=1$. Тоді*

$$M\xi=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}\right)n+C_M+o(1),\ D\xi=\frac{ab}{\sqrt{(a^2+4b)^3}}n+C_M+C_D+o(1),n\to\infty,$$

де

$$C_M=\frac{a(a-\sqrt{a^2+4b})}{2(a^2+4b)},\ C_D=\frac{a((a^2+6b)\sqrt{a^2+4b}-a^3-8ab)}{2(a^2+4b)^2}.$$

Зокрема, якщо a=b=1, то

$$M\xi=\frac{5-\sqrt{5}}{10}n+\frac{1-\sqrt{5}}{10}+o(1),\ D\xi=\frac{\sqrt{5}}{25}n+\frac{\sqrt{5}-2}{25}+o(1),n\to\infty .$$

Для знаходження найбільш ймовірного значення випадкової величини ξ можна діяти подібно тому, як це робиться у випадку біноміального розподілу, тобто, потрібно розв'язати нерівність $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$ відносно k. Обмежимося випадком m=1.

Теорема 2. *Нехай*

$$\mu := \frac{n(a^2+4b)-(a^2+2b)-\sqrt{a^2(a^2+4b)(n+1)^2+4b^2}}{2(a^2+4b)}. \qquad (24)$$

Тоді найбільш ймовірними значеннями випадкової величини ξ *будуть числа* $[\mu]$ *(ціла частина числа* μ*), якщо* μ *неціле, і* μ *та* $\mu+1$*, якщо* μ *ціле.*

Доведення. $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_{n-k-1}^{k+1} a^{n-2(k+1)} b^{k+1}}{C_{n-k}^{k} a^{n-2k} b^k} \geq 1, 0 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right] \Leftrightarrow$

$k^2(a^2+4b)-k(n(a^2+4b)-(a^2+2b))+bn^2-n(a^2+b) \geq 0, 0 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Відповідний квадратний тричлен має такі корені:

$k_{1,2} = \frac{n(a^2+4b)-(a^2+2b) \pm \sqrt{a^2(a^2+4b)(n+1)^2+4b^2}}{2(a^2+4b)}$, а звідси випливає результат теореми, бо $k_1 > \left[\frac{n}{2}\right]$.

Якщо параметри a та b натуральні, то можна займатись пошуками таких n, для яких μ ціле. У випадку a=b=1 відомо: μ ціле тоді і тільки тоді, коли n=F_{4s}, s=1,2,…, F_r – r–те число Фібоначчі [1, Theorem 6, P.340]. У випадку довільних натуральних a та b потрібно розв'язувати рівняння :

$$x^2=Ay^2+4b^2, \quad A=a^2(a^2+4b). \qquad (25)$$

Розглянемо випадки.

1). Якщо A повний квадрат, то шукаємо розв'язки серед піфагорових трійок.

2). Нехай A не є повним квадратом і b=1. Тоді рівняння (25) рівносильне рівнянню Пелля $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2(a^2+4)\left(\frac{y}{2}\right)^2+1$, найменший розв'язок якого (a^2+2, 1), а тому (див., наприклад, [2]) можна отримати нескінченну множину розв'язків (x_s, y_s) рівняння (25) за формулами

$$x_s = 2^{-s}((a^2+2+a\sqrt{a^2+4})^s+(a^2+2-a\sqrt{a^2+4})^s),$$

$$y_s = \frac{2^{-s}}{a\sqrt{a^2+4}}((a^2+2+a\sqrt{a^2+4})^s-(a^2+2-a\sqrt{a^2+4})^s),$$

s=1,2,3…

Ці формули можна перетворити, скориставшись тим, що

$\frac{1}{2}(a^2+2 \pm a\sqrt{a^2+4}) = \left(\frac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}\right)^2$ і тоді x_s=t_{2s}, y_s=$a^{-1}u_{2s-1}$, де

$$u_{2s-1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}\left(\lambda^{2s}-\lambda^{-2s}\right), \; t_{2s} = \left(\lambda^{2s}+\lambda^{-2s}\right), \; \lambda = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Далі n шукаємо серед чисел y_s-1, а якщо врахувати таку властивість чисел u і t: $(a^2+4)u_{2s-1}-at_{2s}=2t_{2s-1}$, то $\mu=\dfrac{t_{2s-1}-(a^2+3)a}{(a^2+4)a}$, $s=1,2,3\ldots$.

Якщо s парне, то $t_{2s-1}-a(a^2+3)$ ділиться націло на $a(a^2+4)$.

3). Нехай A не є повним квадратом і $b>1$.Тоді (див. ,наприклад, [1]) можна користуватись такою множиною розв'язків рівняння (25):

$$x_s=\frac{1}{2}(a^2+2b+\sqrt{A})(x_0+y_0\sqrt{A})^s+\frac{1}{2}(a^2+2b-\sqrt{A})(x_0-y_0\sqrt{A})^s,$$

$$y_s=\frac{1}{2\sqrt{A}}(a^2+2b+\sqrt{A})(x_0+y_0\sqrt{A})^s+\frac{1}{2\sqrt{A}}(a^2+2b-\sqrt{A})(x_0-y_0\sqrt{A})^s,$$

$s=1,2,3\ldots$, де (x_0, y_0) найменший нетривіальний розв'язок рівняння Пелля $x^2=Ay^2+1$.

Приклади.

a	1	1	1	1	1	2	3	3	4
b	1	3	4	9	10	1	1	3	1
n	20	1908	104	300	8768	203	1308	114	5795
μ	5	649	39	125	3699	29	109	19	365

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Piero Filipponi. A note on the representation of integeres as a sum of distinct Fibonacci numbers// The Fibonacci Quarterly.–1986.–24, №4.–P.332–335.
2. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах.–М.:Наука, 1978.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 18 травня 2004р.